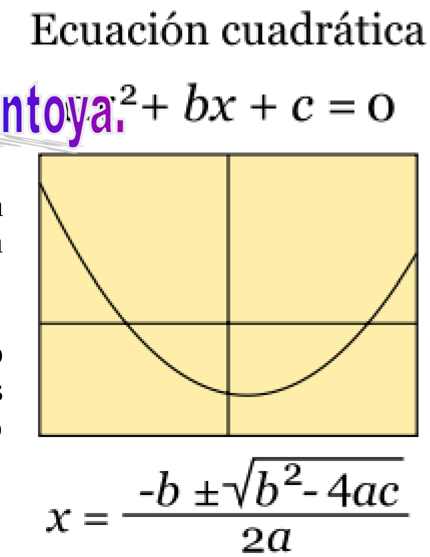
Guía de Matemática.

Tema: La ecuación de segundo grado. Montoya.



Los puntos comunes de una parábola con el eje X (recta y=o), si los hubiese, son las soluciones reales de la ecuación cuadrática.

Una **ecuación de segundo grado**, ecuación cuadrática o resolvente es una ecuación polinómica donde el mayor exponente es igual a dos. Normalmente, la expresión se refiere al caso en que sólo aparece una incógnita y que se expresa en la forma canónica:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde **a** es el coeficiente cuadrático o de segundo grado y es siempre distinto de 0, **b** el coeficiente lineal o de primer grado y **c** es el término independiente.

Expresada del modo más general, una ecuación cuadrática en x^n es de la forma:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

con *n* un número natural y *a* distinto de cero. El caso particular de esta ecuación donde

n = 2 se conoce como **ecuación bicuadrática**.

La ecuación cuadrática es de gran importancia en diversos campos, ya que junto con las ecuaciones lineales, permiten modelar un gran número de relaciones y leyes.

Historia

La ecuación de segundo grado y la solución tiene origen antiguo. Se conocieron algoritmos para resolverla en Babilonia y Egipto.

En Grecia fue desarrollada por el matemático Diofanto de Alejandría.

La solución de las ecuaciones de segundo grado fue introducida en Europa por el matemático judeoespañol Abraham bar Hiyya, en su *Liber embadorum*.

Clasificación

La ecuación de segundo grado se clasifica de la siguiente manera:

1.- **Completa**: Tiene la forma canónica:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde los tres coeficientes *a*, *b* y *c* son distintos de cero.

Esta ecuación admite tres posibilidades para las soluciones: dos números reales y diferentes, dos números reales e iguales (un número real *doble*), o dos **números complejos** conjugados, dependiendo del valor que tome el ***discriminante***

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

ya sea positivo, cero o negativo, respectivamente.

Se resuelven por factorización, por el método de completar el cuadrado o por fórmula general. La fórmula general se deduce más adelante.

2.- **Incompleta pura**: Es de la forma:

$$ax^2 + c = 0$$

donde los valores de *a* y de *c* son distintos de cero. Se resuelve despejando x con operaciones inversas y su solución son dos raíces reales que difieren en el signo si los valores de *a* y *c* tienen signo contrario o bien dos números imaginarios puros que difieren en el signo si los valores de *a* y *c* tienen el mismo signo. Una ecuación cuadrática incompleta de la forma:

$$ax^2 = 0$$

con *a* distinto de cero, muy rara vez aparece en la práctica y su única solución de multiplicidad dos es, por supuesto, x = 0

3.- **Incompleta mixta**: Es de la forma:

$$ax^2 + bx = 0$$

donde los valores de *a* y de *b* son distintos de cero. Se resuelve por factorización de x y siempre tiene la solución trivial x1 = 0. No tiene solución en números complejos.

Solución general de la ecuación de segundo grado

La ecuación completa de segundo grado tiene siempre dos soluciones, no necesariamente distintas, llamadas ***raíces,*** que pueden ser reales o complejas, dadas por la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

donde el símbolo "±" indica que los dos valores

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

son soluciones. Es interesante observar que esta fórmula tiene las seis operaciones racionales del álgebra elemental.

Si observamos el **discriminante** (la expresión dentro de la raíz cuadrada):

$$b^2 - 4ac$$

podremos saber el número y naturaleza de las soluciones:

1. Dos soluciones reales y diferentes si el discriminante es positivo (la parábola cruza dos veces el eje x);
2. Una solución real *doble*, dicho de otro modo, de *multiplicidad dos*, si el discriminante es cero (la parábola sólo toca en un punto al eje x);
3. Dos números complejos conjugados si el discriminante es negativo (la parábola y el eje x no se cruzan).

Deducción de la fórmula general

Relacionando la ecuación de segundo grado con un polinomio de segundo grado y las raíces del mismo (a su vez raíces de una función cuadrática), podemos resolver la ecuación algebraicamente y obtener la fórmula de dicha ecuación.

Sea dada la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde $a \neq 0$ para garantizar que sea *realmente* una ecuación polinómica de segundo grado.

Como **a** es distinto de cero, podemos dividir entre **a** cada término de la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Restamos el valor del término independiente en ambos miembros de la igualdad:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Para completar el **trinomio cuadrado perfecto** (TCP), o más brevemente, para completar el cuadrado en el miembro izquierdo, se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente lineal, por lo que sumamos $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ en ambos miembros de la ecuación:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

Factorizamos el TCP del lado izquierdo y hacemos la operación indicada del derecho:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Hacemos la operación con fracciones en el miembro derecho:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Extraemos raíz cuadrada en ambos miembros:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Separamos las raíces de la fracción del lado derecho:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{(2a)^2}}$$

Simplificamos el radical del denominador del miembro derecho:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Despejamos la incógnita que buscamos:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Combinamos las fracciones con el mismo denominador del lado derecho y obtenemos la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Es trivial el orden en que se toman los valores de x; algunos autores prefieren colocar en primer término el valor menor de x, es decir, aquél en el cual va el signo negativo antes del radical. Antes de aplicar indiscriminadamente la fórmula general en la solución de ecuaciones de segundo grado particulares, se sugiere resolver cada ecuación empleando todos los pasos de la deducción cada vez para tener dominio del método de completar el cuadrado.

Deducción para resolver la ecuación de la forma $x^2 + mx + n$

Esta forma de ecuación cuadrática se caracteriza por que el coeficiente del término en x^2 es 1.Estas ecuaciones pueden resolverse por la fórmula general con solo suponer que a=1, pero existe para ellas una fórmula particular que vamos a deducir. Sin embargo, como se demostrará, es tan similar a la fórmula original que no significa un gran ahorro de tiempo respecto a la fórmula general.

La ecuación es: $x^2 + mx + n = 0$

Transponiendo n: $x^2 + mx = -n$

Sumando $\frac{m^2}{4}$: $x^2 + mx + \frac{m^2}{4} = \frac{m^2}{4} - n$

Descomponiendo el primer término el cual es un trinomio cuadrado perfecto: $(x + \frac{m}{2})^2 = \frac{m^2}{4} - n$

Transponiendo $\frac{m}{2}$: $(x + \frac{m}{2}) = \pm\sqrt{\frac{m^2}{4} - n}$

Extrayendo la raíz cuadrada a los dos miembros: $x = \frac{-m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}$

Haciendo la relación con la fórmula general tenemos que: $x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4n}}{2}$

la cual es prácticamente igual a la anteriormente deducida: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Teorema de Cardano-Viète

Para toda ecuación cuadrática de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

de raíces x_1, x_2 se cumplen los siguientes dos aspectos:

Suma de raíces

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Producto de raíces

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Además se puede hacer uso de la **identidad de Legendre** para obtener la diferencia de raíces.

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4(x_1 \cdot x_2)$$

Solución mediante cambio de variable

Una manera sencilla de resolver una ecuación de segundo grado (y también de tercer y cuarto grado) es aplicar un cambio de variable. En el caso de la ecuación de segundo grado del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, el cambio de variable necesario es del tipo $x = t + n$.

Aplicando el cambio de variable anterior, obtenemos la ecuación $a(t+n)^2 + b(t+n) + c = 0$

y desarrollándola queda $at^2 + (2an + b)t + an^2 + bn + c = 0$ **(1)**.

Ahora debemos reducir la ecuación obtenida a un caso conocido que sepamos resolver. Es evidente que las ecuaciones de segundo grado del tipo $x^2 = K$ se resuelven de forma directa extrayendo la raíz cuadrada de ambos términos y cuya solución general es del tipo $x = \pm\sqrt{K}$.

Para poder transformar nuestra ecuación **(1)** en una ecuación con el término de primer grado igual a cero, debemos forzar a que $2an + b = 0$, es decir $n = -\frac{b}{2a}$

Sustituyendo en **(1)** queda $at^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$. **(2)**

Esta nueva ecuación está en la forma $t^2 = K$ que era lo que pretendíamos lograr con el cambio de variable, y que, como ya se ha dicho, tiene una solución inmediata del tipo $t = \pm\sqrt{K}$

Por tanto, despejando la variable t en la ecuación **(2)**, queda $t = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Dado que $x = t + n$, y que $n = -\frac{b}{2a}$, obtenemos la solución de la ecuación original con variable en x, que es

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El artificio de esta demostración, consiste, por tanto, en aplicar un cambio de variable que reduce la ecuación de segundo grado general a otra ecuación más sencilla y de solución inmediata.

01) $x^2 = 81$

02) $14x^2 - 28 = 0$

03) $(x + 6)(x - 6) = 13$

04) $(2x - 5)(2x + 5) - 119 = 0$

05) $(x + 11)(x - 11) = 23$

06) $\mathbf{x^2 = 7x}$

07) $21x^2 + 100 = - 5$

08) $2x^2 - 6x = 6x^2 - 8x$

09) $(x - 3)^2 - (2x + 5)^2 = - 16$

10) $(4x - 1)(2x + 3) = (x + 3)(x - 1)$

11) $x^2 + 12x + 35 = 0$

12) $x^2 - 3x + 2 = 0$

13) $x^2 + 4x = 285$

14) $5x(x - 1) - 2(2x^2 - 7x) = -8$

15) $(x + 2)^2 = 1 - x(x + 3)$

16) $\frac{2x}{3} + \frac{3}{2x} = \frac{13}{6}$

17) $\frac{x+4}{x+5} - \frac{x+2}{x+3} = \frac{1}{24}$

18) $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} = 2$

19) $\frac{x}{6} + \frac{x^2}{2} = \frac{2x}{3}$

20) $\frac{5x - 8}{x - 1} = \frac{7x - 4}{x + 2}$

Respuestas:

01) $\{-9, +9\}$

02) $\{\pm\sqrt{2}\}$

03) $\{-7, +7\}$

04) $\{-6, +6\}$

05) $\{-12, +12\}$

06) $\{ 0 , 7 \}$

07) $\{ 0 , 5 \}$

08) $\{ 0, 0.5 \}$

09) $\{ 0 , -8\frac{2}{3} \}$

10) $\{ 0 , -1\frac{1}{7} \}$

11) $\{ -5 , -7 \}$

12) $\{ 1 , 2 \}$

13) $\{ 15 , -19 \}$

14) $\{ -1 , -8 \}$

15) $\{ -3 , -0.5 \}$

16) $\{ 2.25 , 1 \}$

17) $\{ 3, -11 \}$

18) $\{ -4 , 2 \}$

19) $\{ 0 , 1 \}$

20) $\{ 4 , 2.5 \}$

Otros Ejercicios:

1.-	$x^2 - 25 = 0$	sol $: x = \pm 5$
2.-	$x^2 + 11 = 0$	sol : **Incompatible**
3.-	$2x^2 - 6 = 0$	sol $: x = \pm\sqrt{3}$
4.-	$x^2 - 5x = 0$	sol $: x = 0 \quad x = 5$
5.-	$3x^2 - 24x = 0$	sol $: x = 0 \quad x = 8$
6.-	$-2x^2 + x = 0$	sol $: x = 0 \quad x = -\frac{1}{2}$
7.-	$(2x + 1)x = 0$	sol $: x = 0 \quad x = -\frac{1}{2}$
8.-	$(2x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$	sol $: x = \pm\frac{1}{2}$
9.-	$(2x - 5)\frac{2x - 3}{2} = 0$	sol $: x = \frac{5}{2} \quad x = \frac{3}{2}$
10.-	$x^2 + x - 6 = 0$	sol $: x = 2 \quad x = -3$
11.-	$2x^2 - 8x - 10 = 0$	sol $: x = 5 \quad x = -1$
12.-	$\frac{2x}{x - 2} = \frac{x}{x + 1}$	sol $: x = 0 \quad x = -4$
13.-	$3(x^2 - 1) - 2(x^2 + 2x) = 5$	sol $: x = 2 \pm 2\sqrt{3}$
14.-	$7x^2 - 21x = 0$	sol $: x = 0 \quad x = 3$
15.-	$2x^2 - 8 = 0$	sol $: x = \pm 2$
16.-	$5x(x + 4) = 0$	sol $: x = 0 \quad x = -4$
17.-	$2x^2 + 18 = 0$	sol : **Incompatible**
18.-	$x^2 - \frac{7}{2}x = 0$	sol $: x = 0 \quad x = \frac{7}{2}$
19.-	$3x^2 - 15 = 0$	sol $: x = \pm\sqrt{5}$
20.-	$\frac{2}{5}x - 4x^2 = 0$	sol $: x = 0 \quad x = \frac{1}{10}$
21.-	$5x^2 - 3x - 3 + x = 3x^2 - 2x + 6$	sol $: x = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$
22.-	$4x^2 - 6x = 2x^2$	sol $: x = 0 \quad x = 3$
23.-	$3(x - 5)^2 - 27 = 0$	sol $: x = 2 \quad x = 8$
24.-	$\sqrt{2}x^2 - x = x^2 + x$	sol $: x = 0 \quad x = 2(\sqrt{2} + 1)$
25.-	$(2x + 3)^2 = 0$	sol $: x = -\frac{3}{2}$ doble
26.-	$(2x + 3)(2x - 3) = 0$	sol $: x = \pm\frac{3}{2}$
27.-	$x^2 + 2x + 1 = 0$	sol $: x = -1$ doble